

Διαφορική Γεωμετρία

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ιανουάριος 28, 2016

1. Δίδεται το σύνολο

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

(α') Αποδείξτε ότι το σύνολο S είναι κανονική επιφάνεια.

(β') Βρείτε την απεικόνιση Gauss N και περιγράψτε γεωμετρικώς την εικόνα της. Είναι η απεικόνιση Gauss $1 - 1$;

(γ') Βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων της S .

(δ') Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες και τις ασυμπτωτικές της S .

2. Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου, $s \in I$, καμπυλότητα $k(s) > 0$ και στρέψη $\tau(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε τη καμπύλη $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\tilde{c}(s) = \int_{s_0}^s \vec{b}(\sigma) d\sigma$$

όπου $\vec{b}(\sigma)$ είναι το δεύτερο κάθετο της c στο $s_0 \in I$.

(α') Αποδείξτε ότι η \tilde{c} είναι κανονική και βρείτε τη καμπυλότητα, το πλαίσιο Frenet και τη στρέψη της.

(β') Αποδείξτε ότι η καμπύλη \tilde{c} είναι σταθερής κλίσης **αν και μόνο αν** η c είναι σταθερής κλίσης.

(γ') Αποδείξτε ότι η \tilde{c} και c είναι γεωμετρικώς ισότιμες **αν και μόνο αν** η c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης με γωνία κλίσης $\hat{\omega} = \pi$

3. Δίδεται καμπύλη $c : (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου και $s \in (0, \ell)$ και καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in (0, \ell)$. Θεωρούμε τη καμπύλη $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύει:

$$\tilde{c}(s) = c(s) + (l - s)\dot{c}(s), \quad s \in (0, \ell)$$

Αποδείξτε ότι η \tilde{c} είναι κανονική και βρείτε τη καμπυλότητά της και το πλαίσιο Frenet και η \tilde{k} της \tilde{c} .

4. Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου, $s \in I$ και καμπυλότητα $0 < k(s) < 1$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε τη παραμετρική επιφάνεια $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$X(s, u) = c(s) + \cos u \vec{\eta}(s) + \sin u \vec{b}(s)$$

όπου $\vec{\eta}(s), \vec{b}(s)$ το κύριο και το δεύτερο κάθετο αντίστοιχα της καμπύλης.

(α') Εξετάστε αν η X είναι κανονική.

(β') Περιγράψτε γεωμετρικά τις παραμετρικές καμπύλες $s = s_0$ όπου s_0 σταθερά.

(γ') Υπολογίστε τη καμπυλότητα Gauss της X . Είναι η X τοπικά ισομετρική με σφαίρα;

(δ') Τι είδος καμπύλη πρέπει να η c έτσι ώστε οι παραμετρικές καμπύλες της c να τέμνονται υπό ορθή γωνία;